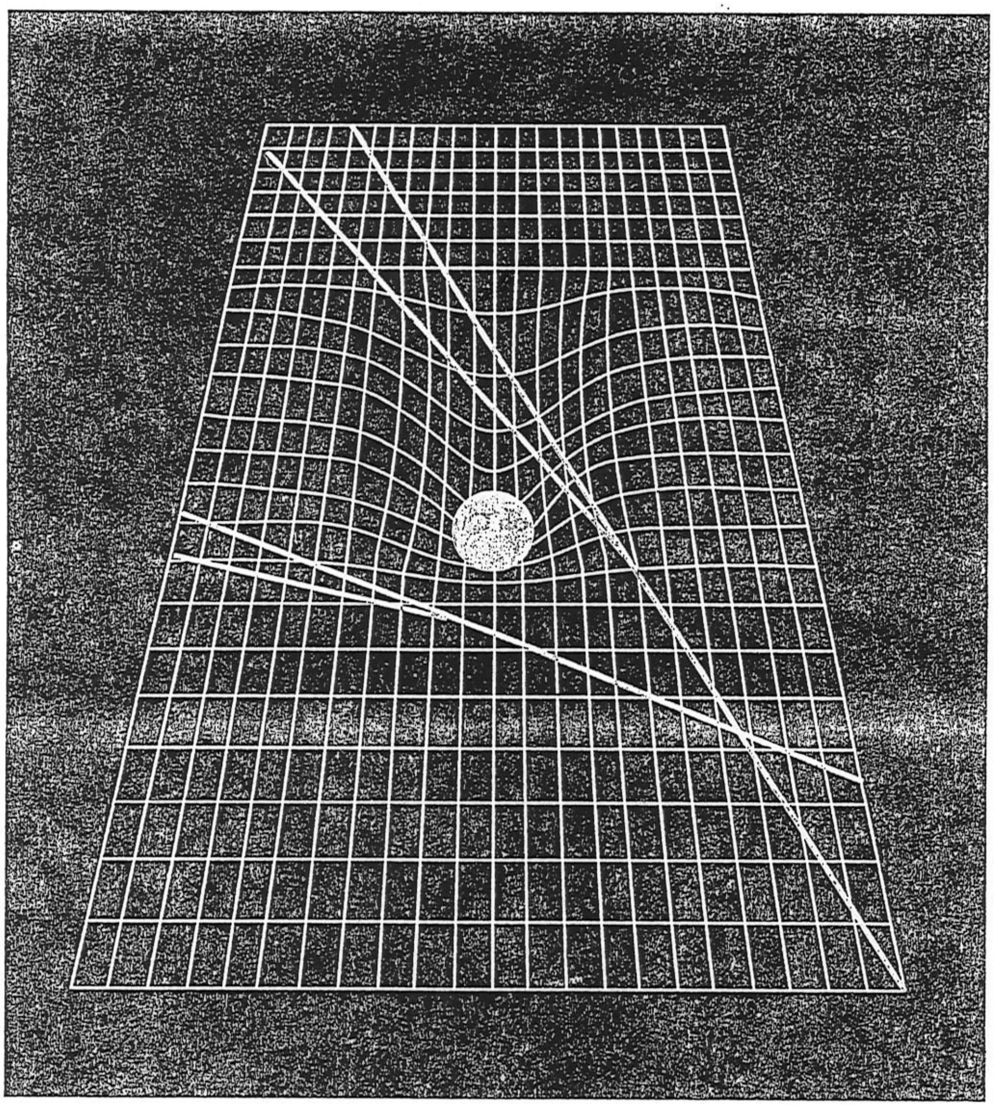
512.72076
C811e
c. 6

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA

EJERCICIOS DE : NÚMEROS NATURALES



ANGELA CORBO LIOI
MERCEDES FERNANDÉZ MIRANDA
MARÍA SOLEDAD ROMO L.

U. Antofagasta-SERBYMAV
35612001900464

Capítulo 1

LOS SÍMBOLOS $\sum$ Y Π, NÚMERO COMBINATORIO Y EL FACTORIAL.

1.0.1 *Ejercicios Resueltos*

Ejercicio 1 *Obtenga una fórmula para las siguientes sumas*

a) $S = \sum_{j=2}^{n+2} (j-1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4.$

b) $S = \sum_{k=1}^{n} a^{-k}$, *si* $|a| > 1.$

c) $S = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$

d) $S = \sum_{k=1}^{n} k! * k.$

e) $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1),$

si se sabe que

$$\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n, \quad \sum_{k=1}^{n} (4k+1) = 2n^2 + 3n.$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=2}^{n+2} (j-1)^4 - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^4 \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)^4 + [(n+2)-1]^4 - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^4 \end{aligned}$$

$$S = (n+1)^4.$$

b)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} a^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{n-k}}{a^n} = \frac{1}{a^n} \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \\ &= \frac{1}{a^n} \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1\right) = \frac{1}{a^n} \left(1 + a + \dots + a^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}, \quad |a| > 1 \end{aligned}$$

e)

$$S=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1),$$

separamos las k pares $k=2t$ y k impares $k=2t-1$, entonces

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{n}(-1)^{2t}(2(2t)+1)+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{2t-1}(2(2t-1)+1) \\ &= \sum_{t=1}^{n}(4t+1)-\sum_{t=1}^{n}(4t-1) \end{aligned}$$

Utilizando

$$\sum_{1}^{n}(4k-1)=2n^2+n \quad \text{y} \quad \sum_{1}^{n}(4k+1)=2n^2+3n.$$

tenemos

$$S=2n^2+3n-\left(2n^2+n\right).$$

Por lo tanto

$$S=2n.$$

Ejercicio 2 *Decida si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:*

a) $\sum_{n=0}^{100} n^4=\sum_{n=1}^{100} n^4$.

b) $\sum_{n=0}^{100} 2=200$.

c) $\sum_{k=0}^{100}(2+k)=2+\sum_{k=0}^{100} k$.

d) $\sum_{1=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{n(n+1)}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Solución:

a) Es verdadera, pues

$$\sum_{n=0}^{100}n^4=0^4+\sum_{n=1}^{100}n^4=\sum_{n=1}^{100}n^4.$$

b) Es falso, pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{100}2 &= 2+2+\ldots+2 \text{ (101 veces)} \\ &= 2\cdot 101 \\ &= 202\neq 200. \end{aligned}$$

c) $\dfrac{n!\,(2n-1)!}{(n-2)!\,(2n)!}$.

d) $\dfrac{(2n+1)!\,(n+1)!}{(n-2)!\,(2n+3)!}$.

e) $\begin{pmatrix} 43 \\ 41 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} n+2 \\ n-1 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} [(n-1)!]^2$.

Solución:

a)

$$\frac{\prod_{j=3}^{6} j}{5!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3.$$

b)

$$\begin{aligned}(n-1)!\prod_{i=n}^{n+3} i &= (n-1)!\cdot n\cdot (n+1)\,(n+2)\cdot (n+3)\\ &= (n+3)!.\end{aligned}$$

c)

$$\frac{n!\,(2n-1)!}{(n-2)!\,(2n)!} = \frac{(n-2)!\,(n-1)\cdot n\cdot (2n-1)!}{(n-2)!\,(2n-1)!\cdot (2n)} = \frac{n-1}{2}.$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!\,(n+1)!}{(n-2)!\,(2n+3)!} &= \frac{(2n+1)!\,(n-2)!\,(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}{(n-2)!\,(2n+1)!\,(2n+2)\,(2n+3)} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{2\,(n+1)\,(2n+3)}\\ &= \frac{(n-1)\,n}{2\,(2n+3)}.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 43 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 43-41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{43\cdot 42}{1\cdot 2} = 43\cdot 21 = 903.$$

f)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n+2 \\ (n+2)-(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(n+2)\,(n+1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3}\\ &= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

Nota: En los ejercicios e) y f) se usó $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{28}{n}}{\binom{24}{n-4}} &= \frac{2700}{(n-3)(n-2)} \\
\frac{28!\,(28-n)!\,(n-4)!}{(28-n)!n!24!} &= \frac{2700}{(n-3)(n-2)} \\
\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n} &= \frac{2700}{(n-3)(n-2)} \;/\cdot (n-3)(n-2) \\
182 &= n(n-1) \\
0 &= n^2-n-182 \\
0 &= (n-14)(n+13)
\end{aligned}
$$

por lo tanto $n = 14$ o $n = -13$. Como n debe ser natural se elige

$$n = 14.$$

Capítulo 3

EL DESARROLLO DE $(A+B)^{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

3.0.3 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 11 *Escriba el desarrollo de:*

$$a)\ (x+4)^5 \qquad b)\ \left(\frac{x}{2}-2y\right)^4 \qquad c)\ \left(\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^6$$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
(x+4)^5 &= \textstyle\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} x^{5-i}\cdot 4^i \\
&= \binom{5}{0} x^5\cdot 4^0 + \binom{5}{1} x^4\cdot 4^1 + \binom{5}{2} x^3 \cdot 4^2 \\
&\quad + \binom{5}{3} x^2 4^3 + \binom{5}{4}\cdot x\cdot 4^4 + \binom{5}{5} x^0\cdot 4^5 \\
&= x^5 + 20x^4 + \tfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 4^2\cdot x^3 + \tfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 4^3\cdot x^2 + 5\cdot 4^4\cdot x + 4^5 \\
&= x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}-2y\right)^4 &= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{4-i}\cdot(-2y)^i \\
&= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} \frac{x^{4-i}}{2^{4-i}}\cdot(-1)^i\cdot 2^i\cdot y^i \\
&= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (-1)^i\cdot 2^{i-(4-i)}\cdot x^{4-i}\cdot y^i \\
&= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i\cdot\binom{4}{i}\cdot 2^{2i-4}\cdot x^{4-i}\cdot y^i \\
&= \binom{4}{0}\cdot 2^{-4}\cdot x^4\cdot y^0 + (-1)\cdot\binom{4}{1}\cdot 2^{-2}\cdot x^3y^1 \\
&\quad + \binom{4}{2}\cdot 2^0\cdot x^2\cdot y^2 + (-1)\cdot\binom{4}{3}\cdot 2^2\cdot xy^3 + \binom{4}{4}\cdot 2^4\cdot x^0y^4 \\
&= 2^{-4}x^4 - 4\cdot 2^{-2}\cdot x^3y + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot x^2y^2 - 4\cdot 4xy^3 + 16y^4 \\
&= \frac{x^4}{16} - x^3y + 6x^2y^2 - 16xy^3 + 16y^4.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} T_7 &= \binom{10}{6} \cdot x^{10-6} \cdot \left(\tfrac{3}{2x^3}\right)^6 = \binom{10}{4} x^4 \frac{3^6}{2^6 \cdot x^{18}}. \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^{-14} \cdot 3^6 \cdot 2^{-6} \\ &= 210 \cdot 3^6 \cdot 2^{-6} \cdot x^{-14} \\ &= 35 \cdot 3^7 \cdot 2^{-5} \cdot x^{-14}. \end{aligned}$$

b) Buscamos un término cualquiera de lugar $k+1$.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{12}{k} \cdot (2x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k \\ &= \binom{12}{k} \cdot 2^{12-k} \cdot x^{24-2k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-k} \\ &= (-1)^k \cdot \binom{12}{k} \cdot 2^{12-k} \cdot x^{24-3k}. \end{aligned}$$

T_{k+1} es el término independiente de x si solo si $24-3k=0$. Luego T_{k+1} es el término independiente de x cuando $k=8$.

Así:

$$\begin{aligned} T_9 &= \binom{12}{8} \cdot 2^4 \cdot x^0 = \binom{12}{4} \cdot 16 \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 495 \cdot 16 = 7920. \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_9 = 7920$ es el término independiente de x.

c) En el desarrollo de $\left(y^2 - \dfrac{x}{2y}\right)^8$ hay 9 términos, por lo tanto hay un único término central que es el T_5.

$$\begin{aligned} T_5 &= \binom{8}{4} \cdot (y^2)^4 \cdot \left(-\frac{x}{2y}\right)^4 \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot y^8 \cdot \frac{x^4}{16y^4} \\ &= \frac{35}{8} x^4 y^4. \end{aligned}$$

d) Un término cualquiera en el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{30}{x}\right)^{15}$ es:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{15}{k} (x^2)^{15-k} \cdot \left(-\frac{30}{x}\right)^k \\ &= \binom{15}{k} x^{30-2k} \cdot (-1)^k \cdot 30^k \cdot x^{-k} \\ &= (-1)^k \cdot \binom{15}{k} \cdot 30^k \cdot x^{30-3k} \end{aligned}$$

Por lo tanto coeficiente x^4 es

$$\binom{15}{4} + \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{18 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 5 \cdot 7 \cdot 13\,(3+1) = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 4 = 1820.$$

g)

$$(1+x)^{50} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + x^2\right) = \left(\tfrac{1}{x} + 1 + x^2\right) \cdot \sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} \cdot x^i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} \cdot x^{i-1}}_{(1)} \; + \underbrace{\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} \cdot x^{i}}_{(2)} \; + \underbrace{\sum_{i=0}^{50} \binom{5o}{i} x^{i+2}}_{(3)}$$

En (1) se tiene x^{25} cuando $i = 26$, en (2) cuando $i = 15$ y en (3) cuando $i = 23$. Luego el coeficiente de x^{25} es

$$\binom{50}{26} + \binom{50}{25} + \binom{50}{23}.$$

h) Un término cualquiera en el desarrollo de $(3x+2)^{19}$ es:

$$T_{t+1} = \binom{19}{t} \cdot (3x)^{19-t} \cdot 2^t = \binom{19}{t} \cdot 3^{19-t} \cdot 2^t \cdot x^{19-t}.$$

Este término tiene x^k cuando:

$$19 - t = k \Rightarrow t = 19 - k,$$

por lo tanto el coeficiente de x^k es

$$\binom{19}{19-k} \cdot 3^k \cdot 2^{19-k}.$$

Además T_{k+1} contiene x^{k+1} cuando:

$$19 - t = k + 1 \Rightarrow t = 18 - k$$

por lo tanto el coeficiente de x^{k+1} es

$$\binom{19}{18-k} \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{18-k}.$$

Luego

$$\binom{19}{19-k} \cdot 3^k \cdot 2^{19-k} = \binom{19}{18-k} \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{18-k}.$$

Capítulo 4
ANÁLISIS COMBINATORIO

4.0.4 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 13 *En cinco butacas de la primera fila de un teatro se debe ubicar a cinco personas, tres hombres y dos mujeres:*

a) *¿De cuántas maneras se les puede ubicar?*

b) *¿De cuántas maneras si los hombres se sientan juntos y la mujeres también?*

c) *¿De cuántas maneras si sólo las mujeres se sientan juntas?*

d) *¿De cuántas maneras si deben ir alternados?*

e) *¿De cuántas maneras si hay una pareja que quiere quedar junta?*

Solución:

a) Cinco personas en cinco butacas se pueden sentar de $5!$ maneras, es decir de 120 maneras.

b) cinco personas, . $\left\{ \begin{array}{l} \text{3 hombres juntos: } 3! \text{ maneras} \\ \text{2 mujeres juntas: } 2! \text{ maneras} \end{array} \right.$, es decir se pueden distribuir en este caso de una de las dos maneras solamente:

H	H	H	M	M

y

M	M	H	H	H

Por lo tanto en total tenemos: $3! \cdot 2! \cdot 2 = 6 \cdot 4 = 24$ maneras de sentarlos.

c) La mujeres van sentadas en bloques de $2!$ maneras y pueden ubicarse de las siguientes formas.

$\boxed{\text{M} \mid \text{M}}$ H H H ; H $\boxed{\text{M} \mid \text{M}}$ H H ; etc.

Total: $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 28$ maneras de ubicarse.

d) En este caso la única manera de distribuirlos es:

H	M	H	M	H

Y no hay otra alternativa, por lo tanto tenemos $3!2! = 12$ maneras de sentarse alternadamente, ya que los hombres se pueden sentar de $3!$ maneras en sus lugares y las mujeres de $2!$ maneras.

e) Si H_0 y H_0 y M_0 son el hombre y la mujer que desean sentarse juntos, entonces:

$\boxed{H_0 \mid M_0}$ o $\boxed{M_0 \mid H_0}$

Van como uno sólo, es decir sólo contamos 4 personas. Por lo tanto tenemos $4! \cdot 2! =$ 48 maneras de sentar a las cinco personas.

f) *¿Cuántas comienzan por "T" y contienen la letra "S"?*

g) *¿Cuántas contienen dos vocales?*

Solución: C R I S T A L: tiene siete letras distintas

a) Una palabra con 4 de las letras dadas, equivale a completar los casilleros

El primer casillero se puede completar con cualquiera de las 7 letras. El segundo tiene sólo 6 alternativas, pues debe ser una letra distinta de la anterior. Análogamente el tercer casillero se puede llenar de 5 maneras y el cuarto casillero se puede llenar de 4 maneras.

Luego tenemos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ palabras.

b) De las letras dadas, cinco son consonantes. El problema es entonces llenar los 4 casilleros usando cinco letras, por lo tanto tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ palabras que contienen sólo consonantes.

c) En este caso tendríamos:

Voc.			cons.

,

como entre las letras dadas hay 5 consonantes y 2 vocales, el casillero de vocales se puede llenar de 2 maneras,el de consonantes de 5 maneras y los otros dos con cualquier par de letras distintas a la vocal y consonante escogidas y distintas entre sí.

Luego hay $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 200$ palabras de este tipo.

d) La letra L puede ir en cualquier casillero:

L			
1	6	5	4

o

	L		
6	1	5	4

o

		L	
6	5	1	4

o

			L
6	5	4	1

En cada caso anotamos abajo el número de maneras posibles de llenar cada casillero. Por lo tanto hay $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 24 \cdot 20 = 480$ palabras que contienen la letra L.

e) Ahora tenemos una palabra de la forma

T			voc.

Luego el primer casillero tiene una posibilidad y el último casillero tiene dos. Por lo tanto hay $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ palabras que empiezan por T y terminan en vocal.

f) En este caso el primer casillero sólo puede contener la letra T y la letra S debe ir en uno de los tres casilleros restantes. Esto es

T	S		
1·	1·	5·	4

o bien

T		S	
1·	5·	1·	4

o bien

T			S
1·	5·	4·	1

por lo tanto hay $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ palabras de esta clase.

c) Sean M y N los estudiantes que sólo van si ambos son escogidos. En este caso tenemos las siguientes alternativas para la delegación:

i) Va M y N, es decir hay dos para la delegación y faltan dos. En este caso $\binom{10}{2}$ maneras de escoger la delegación.

ii) No van M y N, es decir la delegación se escoge de entre los 10 restantes. En este caso tenemos: $\binom{10}{4}$ maneras de escoger la delegación.

Así tenemos que la delegación se puede escoger de:

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 45 + 210 = 255 \text{ maneras.}$$

Ejercicio 17 *Un alumno debe contestar ocho de diez preguntas en un examen.*

a) *¿De cuántas maneras puede contestar el examen?*

b) *De cuántas maneras si las tres primeras preguntas son obligatorias?*

c) *¿De cuántas maneras si se debe contestar por lo menos cuatro de las cinco primeras?*

Solución:

a) Al escoger la ocho preguntas del examen no importa en qué orden lo haga. Luego

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45.$$

Por lo que existen 45 maneras de contestarlas.

b) De las 10 preguntas hay tres obligatorias por lo que de las siete restantes debe escoger cinco para contestar en total las ocho preguntas que se exigen.

Se tiene:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Por lo que hay 21 maneras de contestarlas en este caso.

c) De las cinco primeras contesta a lo menos cuatro, significa que contesta cuatro o bien cinco de ellas.

Posibilidades:

i) Contesta cuatro de las cinco primeras preguntas y cuatro preguntas las escoge de las cinco restantes o bien:

ii) Contesta cinco de las primeras preguntas y tres preguntas las escoge de las cinco restantes.

La posibilidad i):

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} = 5 \cdot 5 = 25 \text{ maneras}$$

contar de cuantas maneras podemos escoger dos personas. Por lo tanto si son n las personas del grupo, el número de maneras de escoger dos personas es:

$$\binom{n}{2} = 45 \quad \text{entonces} \quad \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} = 45$$

así

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 90 \\ n^2 - n - 90 &= 0 \\ (n-10)(n+9) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$n = 10 \quad \text{o} \quad n = -9$$

La posibilidad $n = -9$ no se dá, el número de personas es un número natural. Por lo tanto en el grupo había 10 personas.

Ejercicio 21 *¿De cuántas maneras pueden repartirse 12 objetos distintos entre cuatro personas?*

Solución: Repartir significa dividir en partes iguales. Así, cada persona debe recibir tres objetos.

Luego si ubicamos:

1^apers.	2^apers.	3^apers.	4^apers.

- La 1^apers. puede recibir los tres objetos de $\binom{12}{3}$ maneras.
- La 2^apers. puede recibir de $\binom{9}{3}$ maneras, ya que hay tres objetos que ya se entregaron.
- 3^apers. las puede recibir de $\binom{6}{3}$ maneras.
- La 4^apers. las puede recibir de $\binom{3}{3}$ maneras.

  Entonces

$$\begin{aligned} &\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3} \\ = \;& \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 396600. \end{aligned}$$

Por lo tanto, 12 objetos distintos se pueden repartir entre cuatro personas de 396.600 maneras.

Ejercicio 22 *¿De cuántas maneras se puede repartir cinco regalos distintos a dos niños si uno recibirá tres y el otro dos regalos?*

Solución:
- El 1^{er} niño recibe tres regalos de $\binom{5}{3}$ maneras.