La función logaritmo natural

Eliseo Martínez

27 de septiembre de 2022

Resumen

Se estudia la función logaritmo natural como la función inversa de la exponencial, y se muestra su utilidad en la utilización de modelos exponenciales.

1. El inverso de la función exponencial

Sabemos que la función

$$e^x \quad ; -\infty < x < \infty \tag{1}$$

es siempre positiva, y además para valores grandes positivos la función toma valores grandes, y para valores negativos grandes la función toma valores cercanos a cero. En el lenguaje matemático esto se escribe como

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \tag{2}$$

Esta simbología es muy fácil de entender o verificar. En efecto, podemos realizar una pequeña tabla para números grandes positivos

x	e^x
5	148.4131591
9	8103.083927
16	$8{,}886110520 \cdot 10^6$
∞	e^∞

De igual manera podemos hacer una tabla para números grandes negativos

x	e^x
-5	0,006737946999
-9	0.0001234098040
-16	$1{,}125351747 \cdot 10^{-7}$
$-\infty$	$\frac{1}{e^\infty} \approx 0$

Consideremos la igualdad
$$e^5 = 148{,}4131591$$
y transformemos esta evidente igualdad en una ecuación como la siguiente
$$e^x = 148{,}4131591$$
Es claro que la respuesta es la obvia $x = 5$ en virtud de la tabla anterior. sin embargo plantearemos otra ecuación que no nos da información las tablas anteriores, por ejemplo
$$e^x = 12{,}5 \tag{3}$$
A primera vista podemos decir que el valor de x para esta ecuación es mayor que 1, y simplemente debemos empezar a buscar un múmero x tal que ese número satisfaga la igualdad dada en (3). La búsqueda de ese número se consigue mediante una tabla especial[1] llamada *logaritmo natural*, y que se denota por ln. De otra forma resolver la ecuación (3) es encontrar el logartitmo natural del número 12.5, y este es
$$ln(12{,}5) = 2{,}525728644 \tag{4}$$
De este modo se concluye que la función inversa de la función exponencial $y = e^x$ es $x = ln(y)$. De otra forma, si el exponente de e es x entonces e^x da como resultado el número y. Ahora si aplicamos el logaritmo natural al número y, esto es $ln(y)$ recuperamos el número x. Obtenemos esta igualdad fundamental
$$ln(e^x) = x \tag{5}$$
En resumen, si el logaritmo natural de un número positivo b es a, es decir $ln(b) = a$ significa que $e^a = b$

2. Ecuaciones exponenciales

Sea la ecuación
$$e^{2x} = 5$$
Para resolverla aplicamos logatitmo natural, esto es
$$ln(e^{2x}) = ln5$$
y puesto que $ln(e^{2x}) = 2x$ obtenemos que
$$2x = ln5$$
y en consecuencia
$$x = \frac{ln5}{2}$$

[1]Esta tabla ya está incorporada en todos los computadores y calculadoras. Y hace 50 años atrás los estudiantes debían leer esta tabla en un libro especial llamada **Tabla Larsen**

ahora buscamos en una tabla o en el computador el valor de $ln5$, que es 1.609437912, tenemos el valor de x, que es

$$x = \frac{1{,}609437912}{2} = 0{,}8047189562$$

3. Procesos de disminución

Suponga que la concentración de una sustancia es función del tiempo[2], digamos $c(t)$, y supongamos que esta concentración se modela u obedece a la ecuación

$$c(t) = c_0 e^{-0{,}2 \cdot t} \tag{6}$$

¿Qué podemos decir?
Veremos en clases la respuestas a esta interrogante...

[2]Vamos a suponer que, para este ejemplo, las unidades de tiempo son días