La función exponencial

Eliseo Martínez

6 de septiembre de 2022

Resumen

La función exponencial en su forma general $e^{\alpha \cdot t}$ es una de los modelos más frecuentes usados en la ciencia. Modela procesos de crecimiento cuando $\alpha > 0$ y modelos de decrecimiento cuando $\alpha < 0$. Haremos un estudio en ambos casos y lo pondremos en un contexto de modelos muy frecuentes en la didáctica de su enseñanza

1. Crecimiento exponencial

Consideremos la función

$$c(t) = e^{\alpha \cdot t} \ ; \quad \alpha > 0 \tag{1}$$

Hemos adoptado la letra c para esta función para subrayar que es una función creciente, por el solo hecho de exigir que la constante α es positiva. Y además vamos a considerar que la variable t estará asociada al tiempo, salvo que se indique otra interpretación, de modo que $t \geq 0$ Propiedades de la función dada en (1):

1. Es una función creciente, puesto que si $t_2 > t_1$ entonces $\alpha \cdot t_2 > \alpha \cdot t_1$ y en consecuencia $e^{\alpha \cdot t_2} > e^{\alpha \cdot t_1}$
2. $c(t) > 0$
3. $c(0) = 1$, puesto que $e^{\alpha \cdot 0} = e^0 = 1$
4. $\lim_{t \to \infty} e^{\alpha \cdot t} = \infty$

La última propiedad simplemente dice que para un t muy grande, el valor de $e^{\alpha \cdot t}$ es extremadamente grande. Vamoos a estudiar la derivada de la función dada en (1). Sea h un valor pequeño positivo, y calculemos la diferencia

$$c(t+h) - c(t)$$

que sabemos es positiva, puesto que $t + h > t$ y $c(t)$ es creciente. Calculando

$$c(t+h) - c(t) = e^{\alpha \cdot (t+h)} - e^{\alpha \cdot t} = e^{\alpha \cdot t}(e^{\alpha \cdot h} - 1) \tag{2}$$

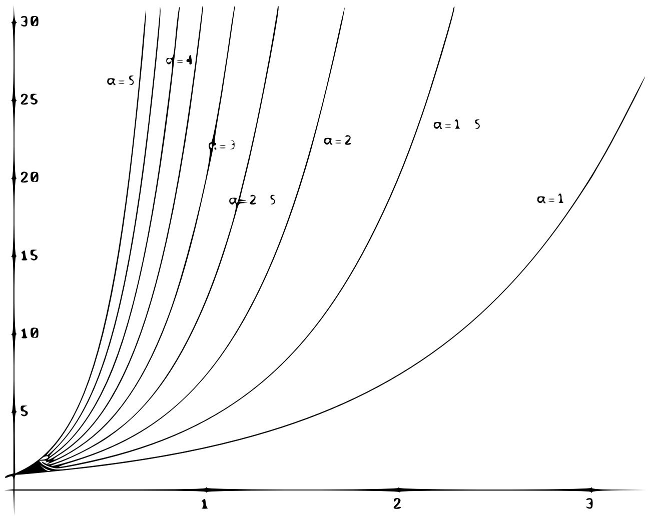

Figura 1: Gráficas de $e^{\alpha \cdot t}$ con $\alpha = 1 \to 5$ en saltos de 0,5 de derecha a izquierda

Ahora dividimos la ecuación (2) por h y obtenemos

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h} = e^{\alpha \cdot t} \frac{(e^{\alpha \cdot h} - 1)}{h} \tag{3}$$

Ahora viene un proceso extremadamente complicado. Queremos ver hacia donde tiende la expresión

$$\lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = e^{\alpha \cdot t} \lim_{h \to 0} \frac{(e^{\alpha \cdot h} - 1)}{h} \tag{4}$$

De esta manera el cálculo del límite en (4) depende del cálculo de

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^{\alpha \cdot h} - 1)}{h}$$

Ahora bien, el profesor le va a convencer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^{\alpha \cdot h} - 1)}{h} = \alpha \tag{5}$$

De modo que la derivada de la función $c(t) = e^{\alpha \cdot t}$ es $c'(t) = \alpha e^{\alpha \cdot t}$. Tenemos entonces un resultado sorprendente

$$\frac{d(e^{\alpha \cdot t})}{dt} = \alpha e^{\alpha \cdot t}$$