Aplicación de la función cuadrática: caída libre

Eliseo Martínez

30 de agosto de 2022

Resumen

Se estudia la función cuadrática que modela la caída libre de un cuerpo medido en metros (m),

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

el tiempo, t, medido en segundos, g la aceleración de gravedad[1] con unidades de $\frac{m}{s^2}$ y $s(t)$ es el recorrido del objeto medido en unidades de metros a partir de una altura determinada. Se encuentra la velocidad que adquiere el objeto en su caída libre mediante la introducción de la derivada.

1. Caída libre

Suponga que desde un edificio que tiene una determinada altura se procede a *dejar caer un objeto*. Se sabe que la distancia recorrida depende del tiempo transcurrido t, y depende de la acelaración de gravedad $g = 10\frac{m}{s^2}$, y su dependencia funcional es

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

Notemos que en $t = 0$, que corresponde al tiempo en que se suelta el objeto su recorrido es de $s(0) = 0$. Ahora vamos a medir el recoorido de este objeto en dos tiempo, a saber en t_0 y $t_0 + h$, donde h es un tiempo muy pequeño comparado con el tiempo t_0. Entonces los recorridos desde el momento en que se suelta el objeto son, respectivamente

$$s(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2 \tag{2}$$

$$s(t_0 + h) = \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3)contabilizan las distancias recorridas desde el lugar donde se soltó el objeto. Ahora si nuestro interés es calcular la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ esta se obtiene por la simple diferencia

$$s(t_0 + h) - s(t_0) \tag{4}$$

[1] $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$

Entender esta diferencia dada en (4) es practicamente la clave[2] del concepto de derivada en el Cálculo Diferencial.

2. Velocidad de caida libre

Si $s(t_0+h)-s(t_0)$ es la distancia recorrida en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0+h]$ que es de duración de h segundos entonces se entiende que la velocidad media está dada por

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} \tag{5}$$

Para la función cuadrática dada en (1) se tiene que la diferencia de (4) es

$$s(t_0+h)-s(t_0) = \frac{1}{2}(t_0+h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{1}{2}g(2t_0h+h^2) \tag{6}$$

Luego dividiendo por h para obtener la velocidad media

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = gt_0 + h \tag{7}$$

3. Velocidad en el tiempo t_0

Vemos que la velocidad media en el intervalo $[t_0, t_0+h]$ está dada por (7), de modo que podemos obtener la *velocidad instantanea* en el tiempo t_0, que llamaremos $v(t_0)$, haciendo que h se aproxime tanto como queramos al valor de 0 (se escribe $h \to 0$), y entonces obtenemos que

$$v(t_0) = gt_0 \tag{8}$$

cuyas unidades son $\frac{m}{s}$.

[2]Para visualizar el significado de esta diferencia mire el video que construyo el profesor en el sitio http://intranetua.uantof.cl/estudiomat/TIMT43/videos/diferencia.wmv