LABORATORIO N° 1

Definición 1:

Dada la ecuación $f(x)=0$, donde la función está definida y es continua en el intervalo $(a\,,b)$. Diremos que α es una raíz de la ecuación $f(x)=0$ si y solo si $f(\alpha)=0$.

Teorema 1:

Si una función continua asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[a,b]$, es decir $f(a)f(b)<0$, entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de $f(x)=0$. Esto es existe por lo menos un número $\alpha\in(a,b)$ tal que $f(\alpha)=0$.

1. Determinar el número de raíces de las ecuaciones aplicando el Teorema 1

a) $x^3-x+1=0$

b) $3x^2-e^x=0$

c) $x^2-2^x=0$

d) $x^2+4\sin(x)=0$

e) $e^x+\ln(x)-2=0$

f) $f(x)=2x^3-\frac{7}{2}x^2-3x+5$

MÉTODO DE BISECCIÓN

Supongamos que $f(x)=0$ donde f es una función continua en $[a\,,b]$ y $f(a)f(b)<0$. Para determinar una raíz de $f(x)=0$ en $[a\,,b]$ debemos determinar el punto medio del intervalo el cual es $\frac{a+b}{2}$, evaluando este valor en la función se tiene:

i) Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, entonces $\alpha=\frac{a+b}{2}$ es la raíz deseada.

ii) Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, entonces haciendo $m=\frac{a+b}{2}$ se obtienen dos intervalos, de tal manera que:

$$[a,b]=[a,m]\cup[m,b]$$

Si $f(a)f(m)<0$, entonces $f(m)f(b)>0$, supongamos que este sea el caso, entonces, luego asignando a $a=a_1$ y a $m=b_1$ se obtiene el siguiente intervalo $[a_1,b_1]$, este intervalo se divide por la mitad y se procede en forma análoga al anterior.

Al cabo de cierto número de iteraciones tendremos la raíz exacta de $f(x)=0$ o una sucesión infinita de intervalos $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots[a_n,b_n]$ cada vez más reducidos, tal que:

$$f(a_n)f(b_n)<0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Sea λ el número de decimales exactos que se quiere aproximar la raíz de la ecuación dada, por tanto un criterio de parada será $|x_{n+1}-x_n|=E<5\times10^{-(\lambda+1)}$, ahora el problema radicaría en calcular el número de iteraciones que se tendría que realizar para obtener el número de decimales exactos pedidos.

Esto es, α es la raíz que entrega el método de la bisección para $f(x)=0$, utilizando el criterio de parada entonces tenemos que:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}}<|x_{n+1}-x_n|=E=5\times10^{-(\lambda+1)}$$

Como se puede observar de la expresión anterior podemos despejar n, el cual indicará el número de iteraciones.

$$\frac{b-a}{2^{n+1}}<E \quad\Rightarrow\quad 2^{n+1}>\frac{b-a}{E} \quad\Rightarrow\quad (n+1)\log 2>\log\left(\frac{b-a}{E}\right) \quad\Rightarrow\quad n>\frac{\log\left(\frac{b-a}{E}\right)}{\log 2}-1$$

2. Dada la ecuación $x^2 - 2^x = 0$

a) ¿Cuántas raíces reales posee?

b) Determine un intervalo de números enteros consecutivos donde se encuentra la menor raíz.

c) Determine el número de iteraciones necesarias para asegurar una exactitud de 7 cifras decimales en el método de bisección y usando el intervalo encontrado en b)

d) Calcular el valor de la raíz encontrada en b) usando el método de Bisección con una aproximación de 4 cifras decimales.

3. Considere la ecuación $e^x - 4 + x^2 = 0$

a) Determine cuantas raíces reales tiene.

b) Determine un intervalo de números enteros consecutivos donde se encuentra la mayor raíz.

c) Determine el número de iteraciones necesarias para asegurar una exactitud de 10 cifras decimales en el método de bisección y usando el intervalo encontrado en b)

d) Calcular el valor de la raíz encontrada en b) utilizando el método de Bisección con una aproximación de 4 cifras decimales.

4. Hallar una aproximación de $\sqrt{3}$ .con una exactitud de dos cifras decimales.
Indicación: Hacer $x^2 = 3$

5. Considere la ecuación no lineal $f(x) = 0$ que posee una única raíz $\eta \in [a,b]$ tal que $f(a) < 0$. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de aproximaciones de η, generada por el método de bisección tal que $f(x_0) > 0,\ f(x_1) < 0,$ y $f(x_2) > 0$. Determinar la aproximación x_3 en función de a y b.

6. Aplicando el método de Bisección y realizando 5 iteraciones, hallar los puntos de intersección del círculo $x^2 + y^2 = 4$ con la parábola $y^2 = x - 1$

7. Aplicando el método de Bisección y con una exactitud de dos cifras decimales hallar la menor raíz de la ecuación $6^x = \dfrac{10}{3} - 6^{-x}$.