ECUACIONES NO LINEALES

Dada una función no nula $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, resolver la ecuación $f(x)=0$ es hallar los valores α que anulan dicha función. A dichos valores α se les denomina *raíces* o *soluciones* de la ecuación, o también *ceros* de la función $f(x)$.
Los métodos de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones se clasifican en *directos e iterados*. Los métodos *directos* nos proporcionan la solución mediante un número finito de operaciones elementales, mientras que los *iterados* producen una sucesión convergente a la solución del problema.

Definición 1:

Dada la ecuación $f(x)=0$, donde la función está definida y es continua en el intervalo $(a\,,b)$. Diremos que α es una raíz de la ecuación $f(x)=0$ si y solo si $f(\alpha)=0$.

Ejemplo 1:

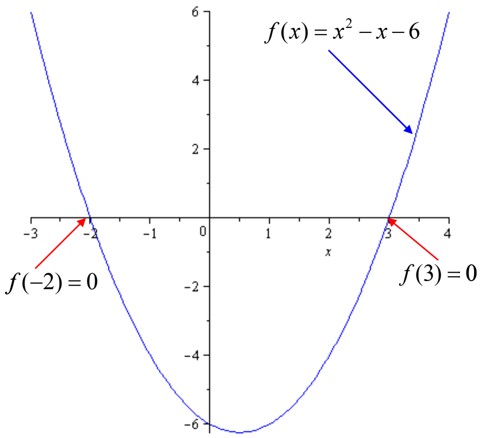
Determinar las raíces de la ecuación $x^2-x-6=0$

Solución:

Como se puede observar nuestra función es $f(x)=x^2-x-6=0$, si calculamos las raíces a través de un método directo sería resolver la ecuación de segundo grado u otro método sería factorizar el trinomio, es decir,

$$x^2-x-6=0 \quad\Rightarrow\quad (x-3)(x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=3 \quad\vee\quad x_2=-2$$

Luego diremos que las *raíces o soluciones* de la ecuación planteada son $\alpha_1=3$; $\alpha_2=-2$ o que los *ceros* de la función $f(x)=x^2-x-6$ son $\alpha_1=3$; $\alpha_2=-2$, dado que $f(3)=0$ y $f(-2)=0$.
Esto se muestra en la figura siguiente.



El cálculo aproximado de las raíces reales de $f(x)=0$, se efectúa en dos etapas:

i) *Separación de raíces.* Establecer los intervalos más pequeños posibles $(a\,,b)$ que contengan una y solo una raíz de $f(x)=0$.

ii) *Mejorar los valores de las raíces aproximadas.* Manipularlos hasta que representen el grado de exactitud requerido.

Teorema 1:

Si una función continua asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[a,b]$, es decir $f(a)f(b)<0$, entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de $f(x)=0$. Esto es existe por lo menos un número $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha)=0$.

Ejemplo 1:

Determinar el número de raíces de la ecuación

$$f(x)=x^3-x+1$$

Solución:

Primero analicemos la gráfica de esta función aplicando las técnicas de la derivada.

$$f(x)=x^3-x+1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3x^2-1$$

Igualando a cero la primera derivada para determinar los valores críticos (es decir, donde la curva tiene un máximo o un mínimo)

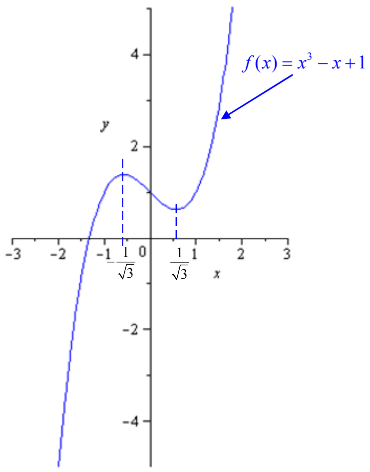
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto existen dos valores críticos $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Calculando la segunda derivada se tiene $f''(x)=6x$, luego evaluando los valores críticos se tiene:

Si $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}>0$, por tanto en x_1 existe un mínimo y su valor es $f(x_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}+1=0{,}61509982$.

Si $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=--\frac{6}{\sqrt{3}}<0$, por tanto en x_2 existe un máximo y su valor es $f(x_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{3}}+1=1{,}384900179$. Por tanto la gráfica de esta función se muestra en la figura siguiente



Como se puede observar en la grafica esta ecuación tiene una sola raíz real. También de la gráfica se puede observar que el intervalo más pequeño cuyos extremos son números enteros que contiene a la raíz es $[-2,-1]$

Para justificar esta situación podemos aplicar el **Teorema 1** en la forma siguiente:

$$f(-2)=(-2)^3-(-2)+1=-8+2+1=-5<0$$

$$f(-1)=(-1)^3-(-1)+1=-1+1+1=1>0$$

Luego, se tiene $f(-2)f(-1)=(-5)(1)=-5<0 \quad \therefore \quad f(-2)f(-1)<0$

Por tanto la raíz pertenece al intervalo $[-2,-1]$.

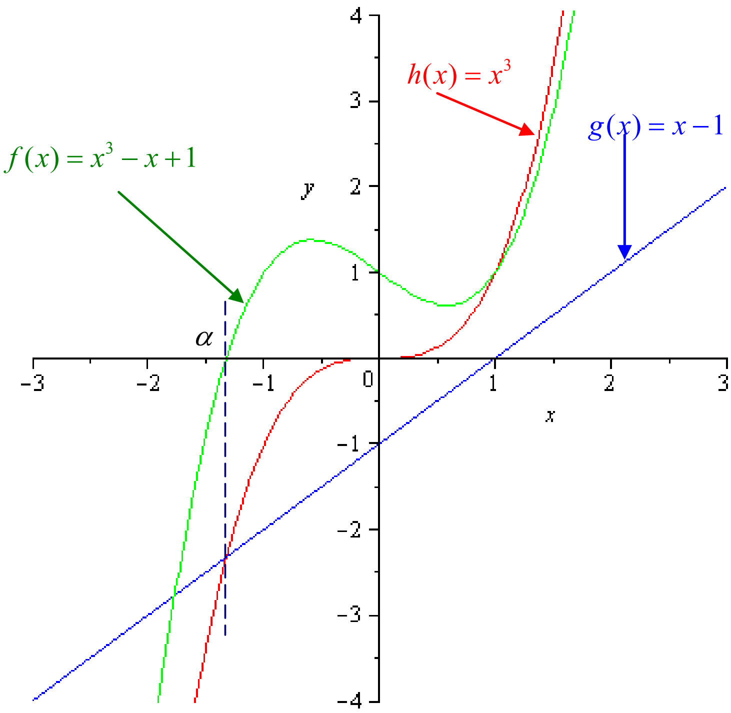
Observación 1:

Es conveniente a veces sustituir $f(x)=0$ por una ecuación equivalente (por lo que tienen las mismas raíces). Esto es

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x)=g(x)$$

donde las funciones h y g son más sencillas de graficar que f, entonces las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de h y g son las raíces deseadas.

Analicemos el ejemplo anterior aplicando este método, dado que $f(x)=x^3-x+1$, entonces como $f(x)=0$ podemos proponer las siguientes funciones $h(x)=x^3$ y $g(x)=x-1$, cuyas gráficas son menos complicadas de realizar, como se muestra en la figura siguiente:



Como se puede observar el valor de la abscisa del punto que intersecta el eje X de la función $f(x)=x^3-x+1$, es la misma que el punto de intersección de las curvas $h(x)=x^3$ y $g(x)=x-1$, por tanto podemos decir que esta forma de graficar para determinar las raíces reales de una ecuación es bastante operativo y facilita la visualización en una forma más sencilla y rápida que el método a través de la derivada, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2:

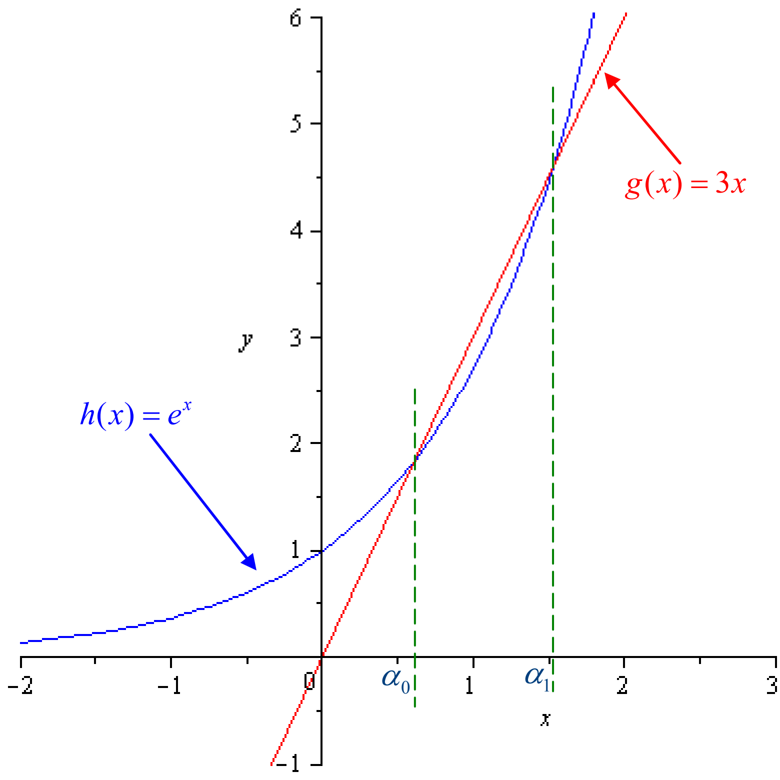
Determinar el número de raíces de la ecuación $e^x - 3x = 0$.

Solución:

Como se vio en el ejemplo si aplicamos las técnicas de la derivada el trabajo es muy largo para conocer el número de raíces reales y si tratamos de resolver la ecuación planteada, nos encontramos con la siguiente problemática

$$e^x - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 3x \,/\, \ln \quad \Rightarrow \quad x = 3 + \ln x$$

Como se puede ver resulta una ecuación igual o más complicada que la inicial para determinar los valores de las raíces reales, entonces podemos hacerlo en forma gráfica, sea $h(x) = e^x$ y $g(x) = 3x$ que resultan ser dos funciones fáciles de graficar, como se muestra en la figura siguiente:



Como se puede observar en la figura anterior existen dos raíces reales, las cuales podemos verificar a través del teorema 1.

Una de las raíces reales es α_0 la cual pertenece al intervalo cerrado $[0\,;1]$ dado que:

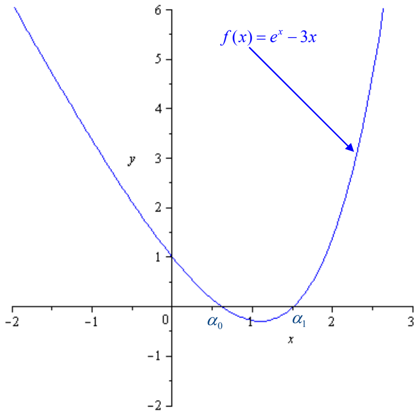
$f(0) = e^0 - 3(0) = 1$ y $f(1) = e^1 - 3(1) = -0,2817181716$, por tanto:

$f(0) \times f(1) = (1) \times (-0,281718716) = -0,281718716 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) \times f(1) < 0$, luego $\alpha_0 \in [0\,;1]$

La otra raíz que se observa en la gráfica es α_1 que pertenece al intervalo $[1\,;2]$, apliquemos el teorema 1 para verificar esta afirmación:

$f(1) = e^1 - 3(1) = -0,2817181716$ y $f(2) = e^2 - 3(2) = 1,389056099$, por tanto

$f(1) \times f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \in [1\,;2]$. Este análisis se confirma si observamos la grafica de la función $f(x) = e^x - 3x$, en la siguiente figura.



Ahora analizaremos los métodos numéricos más importantes para resolver ecuaciones no lineales, los cuales son: *El método de Bisección*, *El método de Iteración o Punto fijo* y *El método de Newton*.

MÉTODO DE BISECCIÓN

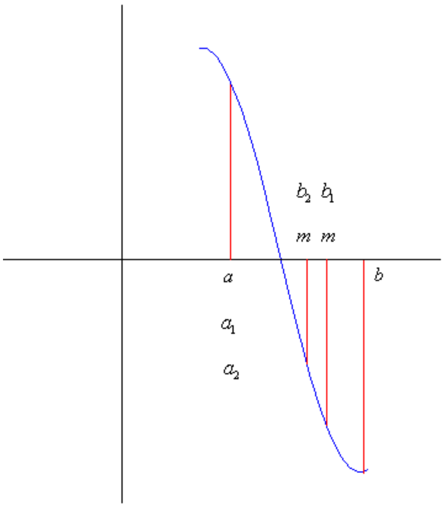
Supongamos que $f(x)=0$ donde f es una función continua en $[a\,,b]$ y $f(a)f(b)<0$. Para determinar una raíz de $f(x)=0$ en $[a\,,b]$ debemos determinar el punto medio del intervalo el cual es $\dfrac{a+b}{2}$, evaluando este valor en la función se tiene:

i) Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, entonces $\alpha=\dfrac{a+b}{2}$ es la raíz deseada.

ii) Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$, entonces haciendo $m=\dfrac{a+b}{2}$ se obtienen dos intervalos, de tal manera que:

$$[a,b]=[a,m]\cup[m,b]$$

Si $f(a)f(m)<0$, entonces $f(m)f(b)>0$, supongamos que este sea el caso, entonces, luego asignando a $a=a_1$ y a $m=b_1$ se obtiene el siguiente intervalo $[a_1,b_1]$, este intervalo se divide por la mitad y se procede en forma análoga al anterior. Gráficamente esto se ve así:



Al cabo de cierto número de iteraciones tendremos la raíz exacta de $f(x)=0$ o una sucesión infinita de intervalos $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots[a_n,b_n]$ cada vez más reducidos, tal que:

$$f(a_n)f(b_n)<0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

El tamaño de cada intervalo es $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$; $n=0,1,2,3,4,\ldots\ldots$

Como los puntos extremos $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ forman una sucesión acotada monótona no decreciente y los extremos derechos $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$ forman una sucesión acotada no creciente, entonces existe un límite común:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

Ahora,

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)f\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)=f(\alpha)f(\alpha)=\left[f(\alpha)\right]^2\le 0 \quad\Rightarrow\quad f(\alpha)=0$$

Esto es, α es la raíz que entrega el método de la bisección para $f(x)=0$

Algoritmo 1.

Dada una función $f(x)$ continua sobre el intervalo $[a_0\,,b_0]$ y tal que $f(a_0)f(b_0)<0$.

i) Calculamos el punto medio del intervalo a través de $m_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ $\forall\, n=0,1,2,\ldots$

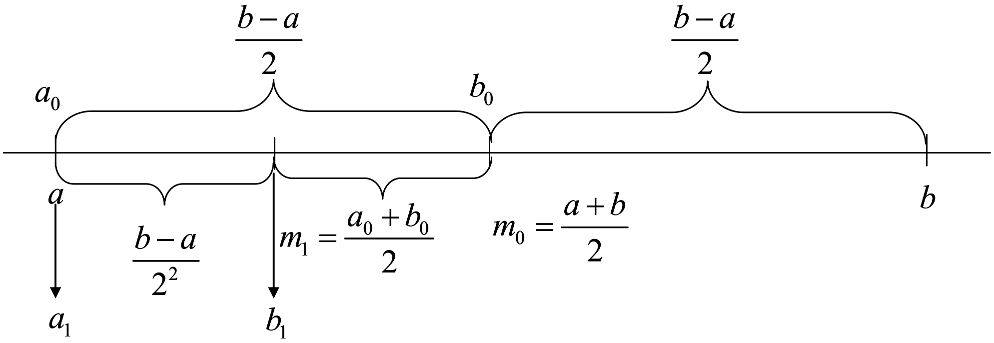
ii) Si $n=0 \;\wedge\; f(m_0)=0$, entonces el valor de la raíz es $\alpha_0=m_0$

iii) Si $f(m_0)\neq 0$, entonces tendremos dos intervalos tales que:

$$[a,b]=[a\,,m_0]\cup[m_0\,,b]$$

iv) Si $f(a)\times f(m_0)<0$, entonces $\alpha_0\in[a\,,m_0]$, luego construimos un nuevo intervalo el cual será $a=a_0$ y $m_0=b_0$, de lo contrario ($f(a)\times f(m_0)>0$) diremos que $\alpha_0\in[m_0\,,b]$, luego el nuevo intervalo será $a_0=m_0$ y $b_0=b$

Sea λ el número de decimales exactos que se quiere aproximar la raíz de la ecuación dada, por tanto un criterio de parada será $|x_{n+1}-x_n|=E<5\times10^{-(\lambda+1)}$, ahora el problema radicaría en calcular el número de iteraciones que se tendría que realizar para obtener el número de decimales exactos pedidos. Observemos el siguiente esquema:



Cuando aplicamos el método de Bisección, primero calculamos el punto medio del intervalo, cuyo valor es $m = \dfrac{a+b}{2}$, y su longitud es $b_0 - a_0 = \dfrac{b-a}{2}$, si suponemos que la raíz de la ecuación pertenece al intervalo $[a\,,m] = [a_0\,,b_0]$, entonces debemos calcular el punto medio de este intervalo cuyo valor será $m_0 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ y su amplitud es $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0-a_0}{2}$, reemplazando la longitud del intervalo $[a_0\,,b_0]$, en esta última igualdad se tiene:

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{\frac{b-a}{2}}{2} = \frac{b-a}{4} = \frac{b-a}{2^2}$$

De esta manera se obtiene que el tamaño de cada intervalo es dado por $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ y utilizando el criterio de parada entonces tenemos que:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < |x_{n+1} - x_n| = E = 5 \times 10^{-(\lambda+1)}$$

Como se puede observar de la expresión anterior podemos despejar n, el cual indicará el número de iteraciones.

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < E \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} > \frac{b-a}{E} \quad \Rightarrow \quad (n+1)\log 2 > \log\left(\frac{b-a}{E}\right) \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\log\left(\frac{b-a}{E}\right)}{\log 2} - 1$$

Ejemplo 3:

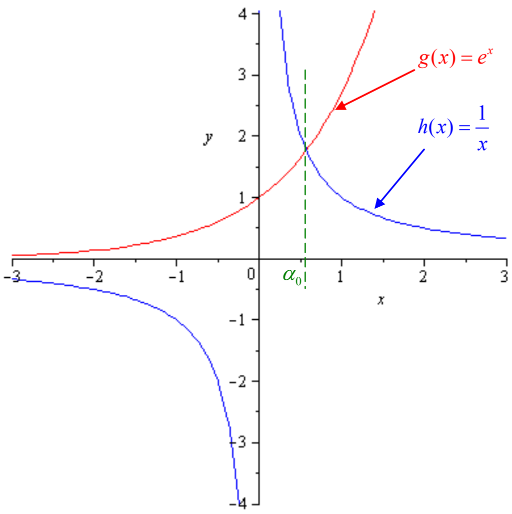
Dada la ecuación $xe^x - 1 = 0$, determinar:

a) Gráficamente sus raíces reales y acotarlas en intervalos de enteros consecutivos.

b) El error después de siete iteraciones a través del Método de Bisección.

Solución:

a) Sea $f(x) = xe^x - 1 \;\Rightarrow\; g(x) = e^x \;\wedge\; h(x) = \dfrac{1}{x}$, graficando estas dos últimas dos funciones obtendremos las raíces reales en forma gráfica.



Como se puede observar en la gráfica existe una sola raíz real, la cual pertenece al intervalo $[0\,;1]$, una justificación de esta afirmación es a través de Teorema 1

$$f(0)=(0)e^{(0)}-1=-1 \quad \wedge \quad f(1)=(1)e^{(1)}-1 \doteq 1,718$$

$$f(0)\times f(1)=-1,718<0$$

Por tanto existe una sola raíz en el intervalo $[0\,;1]$

b) Aplicando el Método de Bisección se tiene:

n	a_n	b_n	m_n	$f(a_n)$	$f(m_n)$	$f(a_n)\times f(m_n)$	$\lvert m_{n+1}-m_n\rvert$
1	0	1	**0,50000000**	-1	-0,17563936	+	0,25
2	0,5	1	**0,75000000**	-0,17563936	0,58775001	-	0,125
3	0,5	0,75	**0,62500000**	-0,17563936	0,16765372	-	0,0625
4	0,5	0,625	**0,56250000**	-0,17563936	-0,01278176	+	0,03125
5	0,5625	0,625	**0,59375000**	-0,01278176	0,07514236	-	0,015625
6	0,5625	0,59375	**0,57812500**	-0,01278176	0,03061924	-	0,0078125
7	0,5625	0,578125	**0,57031250**	-0,01278176	0,00878	-	**0,00390625**
8	0,5625	0,5703125	**0,56640625**	-0,01278176	-0,00203538	+	

Como se puede observar en el cuadro anterior

$$E=\lvert x_{n+1}-x_n\rvert=0,00390625<0,005=5\times10^{-3}=5\times10^{-(\lambda+1)}$$

Por tanto $-(\lambda+1)=-3 \quad\Rightarrow\quad \lambda=2$

Luego podemos asegurar que la solución de la ecuación es $\alpha=0,57$ con dos cifras decimales exactos.

MÉTODO DE ITERACIÓN PUNTO FIJO

Como se pudo ver anteriormente un método de iteración consiste en crear una sucesión convergente a la solución de un problema

Definición 2:

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice ***contractiva*** si verifica que

$$\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert<\lvert x_1-x_2\rvert \quad \forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Si la función es derivable basta comprobar que $\lvert f'(x)\rvert\le q<1$ cualquiera que sea el valor de $x\in\mathbb{R}$ para poder garantizar que se trata de una función *contractiva*.

Si se desea resolver la ecuación $f(x)=0$, se escribe esta en la forma $x=g(x)$, donde $g(x)$ es una función *contractiva*, y partiendo de un valor inicial x_0, se construye la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$. La convergencia de esta sucesión el siguiente teorema.

Teorema 2. (*Teorema del punto fijo*)

Dada la ecuación $x = g(x)$ en la que $|g'(x)| \leq q < 1$ cualquiera que sea $x \in [a\,;b]$ y un punto $x_0 \in [a\,;b]$, la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ en la que $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a un valor α que es la única solución de la ecuación en dicho intervalo.

Demostración:

Dado que $x_{n+1} = g(x_n)$ y $x_n = g(x_{n-1})$ entonces $x_{n+1} - x_n = g(x_n) - g(x_{n-1})$, pero aplicando el *Teorema del Valor Medio* se tiene que:

$$\frac{g(x_n) - g(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = g'(c) \quad ; \quad c \in [x_{n-1}\,; x_n]$$

Entonces

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\,g'(c)$$

Luego

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q\,|x_n - x_{n-1}|$$

Si $n = 1$ entonces $|x_2 - x_1| \leq q\,|x_1 - x_0|$

Si $n = 2$ entonces $|x_3 - x_2| \leq q\,|x_2 - x_1| \leq q\left(q\,|x_1 - x_0|\right) = q^2\,|x_1 - x_0|$

Si $n = 3$ entonces $|x_4 - x_3| \leq q^3\,|x_1 - x_0|$

……………………………………………

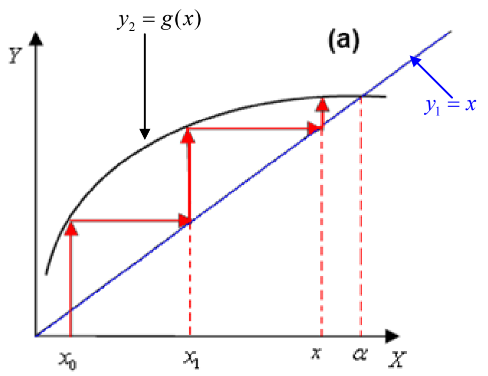
Si $n = k$ entonces $|x_{k+1} - x_k| \leq q^k\,|x_k - x_{k-1}|$

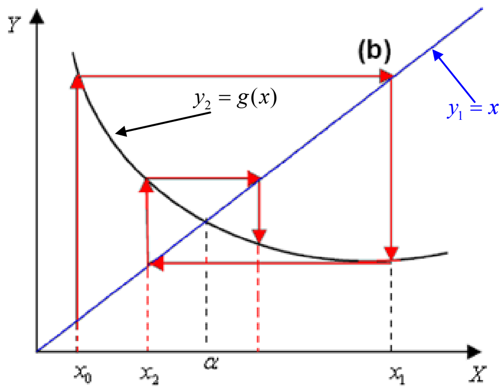
Formemos la suma parcial de las longitudes de los k primeros intervalos es decir:

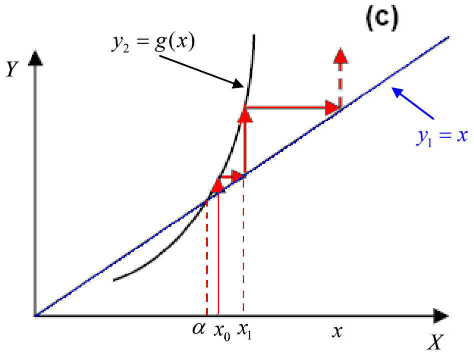
$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{k+1} - x_k)$$

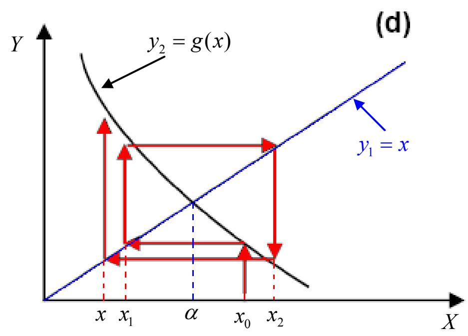
La suma parcial $S_{k+1} = x_k$ y la serie es absolutamente convergente por estar acotados sus términos, en valor absoluto, por los términos de una serie geométrica de razón $q < 1$.

Un planteamiento gráfico diferente es el de separar la ecuación $x = g(x)$ en dos partes, como $y_1 = x$ (recta a 45º) y $y_2 = g(x)$, éstas se pueden graficar por separado. Los valores de x correspondientes a las intersecciones de estas funciones representan las raíces de $f(x) = 0$. En la figura siguiente se muestra la convergencia (a) y (b) ya que verifican el teorema de la convergencia y la divergencia (c) y (d) en el método de Aproximaciones sucesivas.









COTA DEL ERROR A POSTERIORI

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a\,;b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a\,;b)$, sabemos por el Teorema del Valor Medio que existe un punto $c \in (a\,;b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Sea α una solución de la ecuación $f(x)=0$ y sea x_n una aproximación de ella obtenida por un método de iteración cualquiera. Supongamos $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[x_n\,;\alpha]$ ó $[\alpha\,;x_n]$ (dependiendo que α sea mayor o menor que x_n) y derivable en el intervalo abierto $(x_n\,;\alpha)$ ó $(\alpha\,;x_n)$. Existe entonces un punto $c \in (x_n\,;\alpha)$ ó $c \in (\alpha\,;x_n)$ tal que

$$\frac{f(\alpha)-f(x_n)}{\alpha - x_n} = f'(c)$$

Como $f(\alpha)=0$ y $(\alpha - x_n) = \varepsilon_n$, entonces nos queda que $\varepsilon_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(c)}$, obteniéndose que

$$|\varepsilon_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(c)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in\left\{\substack{(\alpha\,;x_n)\\(x_n\,;\alpha)}\right.} |f'(x)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in(a\,;b)} |f'(x)|} \quad \text{con} \quad \left.\begin{matrix}(\alpha\,;x_n)\\(x_n\,;\alpha)\end{matrix}\right\} \in (a\,;b)$$

Lo único que debemos exigir que la derivada de la función no se anule en ningún punto del intervalo $(a\,;b)$

Ejemplo 4:

Determine la raíz real de la ecuación $x^2 - 3 = 0$

Solución:

Como la ecuación es $x^2 - 3 = 0$, entonces $x^2 = 3$, sumando x obtenemos la siguiente igualdad

$$x + x^2 = 3 + x \quad \Rightarrow x(1+x) = 3 + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3+x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x = g(x)$$

Ahora analizaremos si $g(x)$ es una función *contractiva*.

Primero calculemos la derivada de $g(x)$

$$g(x) = \frac{3+x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

Calculamos el valor absoluto de $g'(x)$, se tiene

$$|g'(x)| = \left| -\frac{2}{(1+x)^2} \right| = \frac{2}{(1+x)^2} \leq \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Por tanto $g(x)$ es una función contractiva, es decir, podemos garantizar que a partir de $x_0 = 1$, el método convergerá a la raíz cuadrada de 3.
Las iteraciones se muestran en la siguiente tabla

n	x_n	n	x_n
0	1	14	1,73205079844084
1	2	15	1,73205081001473
2	1,66666666666667	16	1,73205080691351
3	1,75000000000000	17	1,73205080774448
4	1,72727272727273	18	1,73205080752182
5	1,73333333333333	19	1,73205080758149
6	1,73170731707317	20	1,73205080756550
7	1,73214285714286	21	1,73205080756978
8	1,73202614379085	22	1,73205080756863
9	1,73205741626794	23	1,73205080756894
10	1,73204903677758	24	1,73205080756886
11	1,73205128205128	25	1,73205080756888
12	1,73205068043172	26	**1,73205080756888**
13	1,73205084163518		

El error vendrá dado por $\varepsilon_n < \dfrac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in[1\,;\,2]} |f'(x)|}$ donde $f(x) = x^2 - 3$, si $n = 26$ entonces

$$\varepsilon_{26} < \frac{|x_{26}^2 - 3|}{\min\limits_{x\in[1\,;\,2]} |2x|} = \frac{|1,73205080756888 - 3|}{2} = 4,88498 \times 10^{-15} < 5 \times 10^{-15}$$

Por tanto $\lambda = 14$, luego el valor de $\alpha = 1,73205080756888$ y este valor corresponde al valor exacto de la $\sqrt{3}$.

Observación:
Si en problema anterior quisiéramos calcular la raíz aplicando el método de bisección con una exactitud de 14 cifras decimales, tendríamos que calcular el número de iteraciones, es decir,

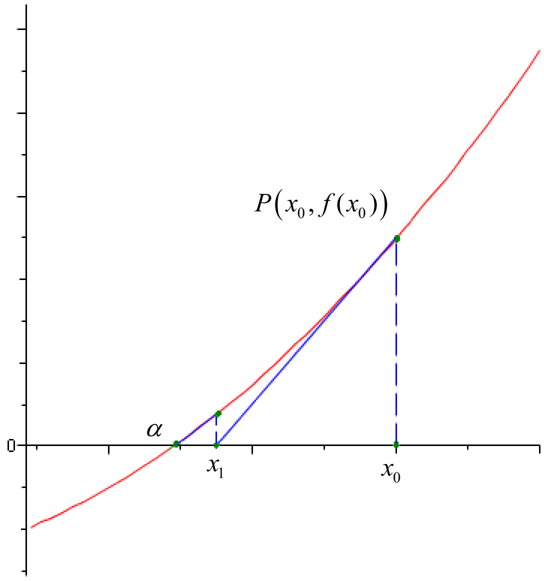
$$n > \frac{\log\left(\dfrac{b-a}{E}\right)}{\log 2} - 1 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\log\left(\dfrac{1}{5\times 10^{-15}}\right)}{\log 2} - 1 = \frac{15 - \log 5}{\log 2} - 1 = 46,5069$$

Por tanto deberíamos realizar 47 iteraciones

Como se puede observar el Método del punto fijo es menos laborioso que el Método de Bisección, también podemos agregar que por lo general disminuye el número de iteraciones, recordemos que para calcular la $\sqrt{3}$ con el método de bisección es necesario realizar 46 iteraciones (con 14 cifras decimales exactos) y con el método del punto fijo sólo se necesitaron 26. Sin embargo a continuación veremos como se puede reducir aún más el número de iteraciones aplicando el método conocido como *El Método Newton*.

METODO DE ITERACION DE NEWTON

Supongamos que queremos resolver la ecuación $f(x)=0$ y lo que obtenemos no es la solución exacta α sino sólo una buena aproximación x_n, para obtener esta aproximación observemos la siguiente figura



Para calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $P(x_0, f(x_0))$ debemos recordar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente, donde la pendiente la podemos obtener derivando la función y evaluando en x_0, así $m = f'(x_0)$, luego

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Si despejamos x obtendremos la intersección con el eje X y este valor corresponde a x_1, es decir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De esta manera podemos repetir el proceso para el punto $(x_1, f(x_1))$ obteniendo el valor de x_2, este proceso lo podemos repetir hasta obtener la ecuación en el punto $(x_n, f(x_n))$, el cual nos permite obtener el valor de x_{n+1} en la forma siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de Newton – Raphson.

Ejemplo 5

Calcular la raíz de 3, aplicando el método de iteración de Newton – Raphson.

Solución:

Como la ecuación a resolver es $x^2 - 3 = 0$, entonces $f(x) = x^2 - 3 = 0$, luego el método de Newton – Raphson nos dice que la función de iteración es dada por:

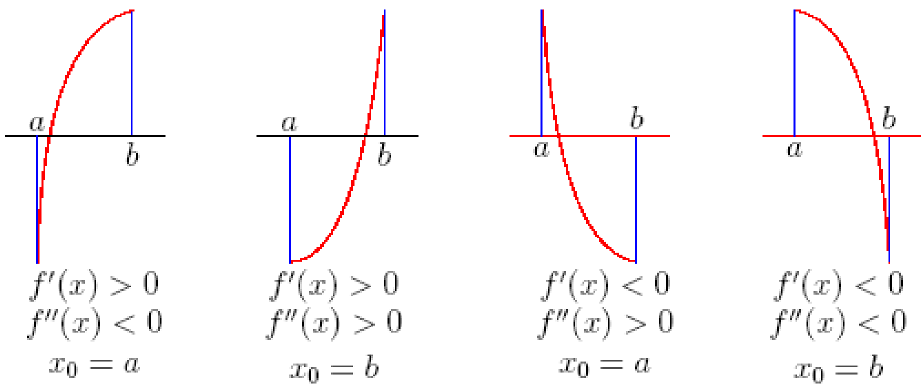
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

Dado que la raíz de 3 es un número comprendido entre 1 y 2 y la función $f'(x) = 2x$ no se anula en dicho intervalo, podemos aplicar el método de Newton – Raphson tomando como valor inicial $x_0 = 2$ obteniéndose.

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 3}{2x_n}$
0	$x_0 =$	2,00000000000000
1	$x_1 =$	1,75000000000000
2	$x_2 =$	1,73214285714286
3	$x_3 =$	1,73205081001473
4	$x_4 =$	**1,73205080756888**
5	$x_5 =$	1,73205080756888

Como se puede observar se ha obtenido la solución en 4 iteraciones, si recordamos el método de Punto Fijo esta solución se obtuvo en 26 iteraciones (Ejemplo 4), además con el método de Bisección se obtiene en 47 iteraciones.

El problema que debemos enfrentar al aplicar este método es el punto inicial x_0, para poder determinar este valor realicemos el siguiente análisis.
Supongamos que tenemos acotada la función en el intervalo $[a\,,b]$, una única raíz α de la ecuación $f(x) = 0$ y que $f'(x)$ y $f''(x)$ no se anulan en ningún punto del intervalo $[a\,,b]$, es decir, que ambas derivadas tienen signos constantes en dicho intervalo.
Obsérvese que si $f(a)f(b) < 0$, dado que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a\,,b)$ entonces por los teorema de Bolzano y Rolle sabemos que existe una única raíz en dicho intervalo. Además por las condiciones exigidas sabemos que no existe, en $(a\,,b)$ ningún ***punto crítico*** (***ni extremo relativo*** ni ***punto de inflexión***), esta situación se presentan en la figura siguiente



En cualquiera de los cuatro casos posibles de la figura anterior la función cambia de signo en los extremos del intervalo (debido a que la primera derivada no se anula en dicho intervalo), es decir, dado que la segunda derivada tiene signo constante en $[a\,,b]$, en uno de los dos extremos la función tiene el mismo signo que su segunda derivada.
En estos casos, el método de Newton – Raphson es convergente debiéndose tomar como valor inicial

$$x_0 = \begin{cases} a & si \quad f(a)\times f''(a) > 0 \\ b & si \quad f(b)\times f''(b) > 0 \end{cases}$$

es decir, el extremo en el que la función tiene el mismo signo que su segunda derivada.
Lo anterior es avalado por el siguiente teorema

Teorema 3: *(Regla de Fourier)*

Sea $f(x)$ una función continua de tal manera que existen $f'(x)$ y $f''(x)$ en un intervalo $[a\,,b]$ además:

i) $f(a)\times f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ y $f''(x) \neq 0$ y mantienen signo $\forall\ x \in [a\,,b]$, entonces:

Existe una única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en dicho intervalo y se puede garantizar la convergencia del ***método de Newton – Raphson*** tomando como valor inicial x_0 el extremo del intervalo en que *la función* y su *segunda derivada* tienen el mismo signo.

Ejemplo 6:

Hallar el punto de inflexión de la curva $y = \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2}$

a) Establezca el esquema iterativo cuando se aplica el método de ***Newton – Raphson***.

b) Determine el valor inicial x_0 que permitirá la convergencia de dicho método.

c) Con una precisión de cinco (5) cifras decimales. Determinar el punto de inflexión.

Solución:

Para determinar el punto de inflexión si existe debemos analizar lo siguiente:

i) Calcular la primera derivada, es decir, y'

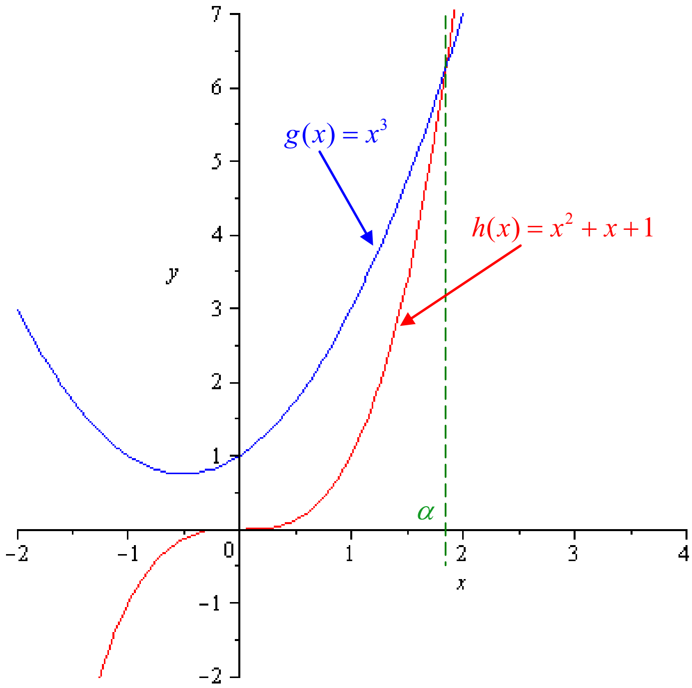
ii) Calcular la segunda derivada e igualar a cero, es decir, $y'' = 0$

iii) Calcular la tercera derivada y evaluar el valor obtenido en ii) si es distinto de cero entonces en el valor encontrado

$$y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$
$$\Rightarrow \quad y'' = x^3 - x^2 - x - 1$$

Como $y'' = x^3 - x^2 - x - 1$, y $y'' = 0$, entonces aplicando el de ***Newton – Raphson***, necesitamos una ecuación $f(x) = 0$, la cual es $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$,

Aplicando el Teorema 1 podemos separar de manera tal que $x^3 = x^2 + x + 1$, luego podemos concluir que tenemos dos funciones las cuales nos permitirán visualizar y analizar las raíces las raíces de la ecuación planteada.



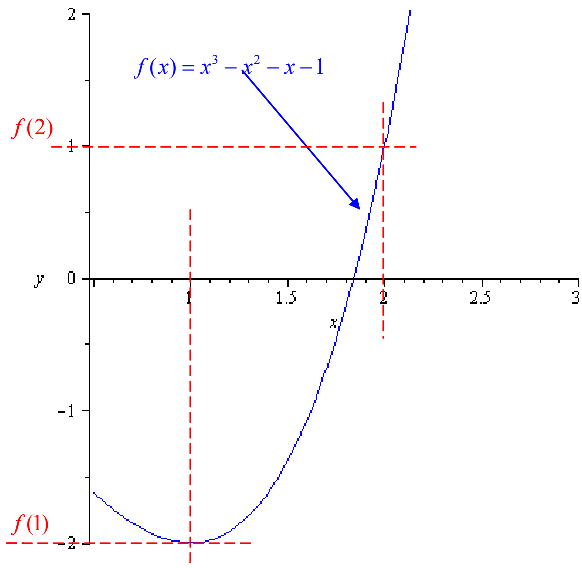
Como se puede observar en la gráfica existe una sola raíz real $\alpha \in [1\,,2]$, según el teorema 1 debe cumplirse que $f(1)\times f(2)<0$, para justificar esta desigualdad calculemos

$$f(1)=(1)^3-(1)^2-(1)-1=-2 \quad ; \quad f(2)=(2)^3-(2)^2-(2)-1=1$$

Por tanto

$$f(1)\times f(2)=(-2)\times(1)=-2<0$$

Este resultado se muestra en la figura siguiente



Luego un esquema iterativo para aplicar el método de Newton – Raphson es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n^2 - x_n - 1}{3x_n^2 - 2x_n - 1}$$

b) Para determinar el valor inicial x_0 que nos asegure la convergencia debemos realizar lo siguiente

i) La $f'(x) \neq 0$ y $f''(x) \neq 0$, además deben mantener signo $\forall x \in [1, 2]$

ii) Existe un $x = x_0$, tal que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$, entonces a partir de este valor podemos asegurar la convergencia.

i) Si $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, entonces:
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \quad \wedge \quad f''(x) = 6x - 2$, el comportamiento de los signos de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$, se muestran en la siguiente tabla.

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
1,01	-	+	+
1,10	-	+	+
1,20	-	+	+
1,30	-	+	+
1,40	-	+	+
1,50	-	+	+
1,60	-	+	+
1,70	-	+	+
1,80	-	+	+
1,90	+	+	+
2,00	+	+	+

ii) De la tabla anterior se puede observar que $x_0 = 1{,}9 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) \times f''(x_0) > 0$, entonces el punto inicial que asegura la convergencia del método de Newton es $x_0 = 1{,}9$

c) Para calcular el punto de inflexión usaremos el esquema iterativo de Newton determinado en la parte a)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n^2 - x_n - 1}{3x_n^2 - 2x_n - 1}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1,9	0,05787728
1	1,84212272	0,00282934
2	1,839293375	6,6196E-06
3	1,839286755	3,6189E-11
4	1,839286755	0

Por tanto el valor del punto de inflexión es $P(1{,}839286755; -2{,}629753892)$